МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО.

8 класс. Комбинаторика–1. 27 мая 2009.

1. Новости в городе Сплетнинске распространяются так: каждый житель, узнавший какую-то новость, на следующее утро делится ею с двумя горожанами, ранее эту новость не знавшими, и больше никому ее не рассказывает. В декабре семь жителей Сплетнинска независимо друг от друга узнали важную новость.
a) Могут ли через несколько дней ровно 500 жителей знать эту важную новость?
b) 20 декабря ровно 247 жителей знали эту новость. Какого числа узнал ее первый из жителей города?

2. Пять девушек владеют небольшим магазином, работающим с понедельника по пятницу. Каждый рабочий день там должны работать две из них. Они хотят составить расписание на неделю так, чтобы каждая из них работала ровно два дня, причем с разными напарницами. Сколькими способами можно составить такое расписание?

3. В олимпиаде участвуют a) 2008; b) 2010 школьников. Во время каждого тура их рассаживают в две очень большие аудитории так, чтобы в них было поровну школьников. Какое наименьшее число туров нужно провести так, чтобы любые двое хотя бы в одном из туров находились в одной аудитории?

4. Имеется 2008 мешков, пронумерованных числами от 1 до 2008, в каждом из которых сидит по 2008 лягушек. Два игрока играют в следующую игру: каждый игрок своим ходом выбирает один из мешков и вынимает из него несколько лягушек. При этом, если в данном мешке осталось $x \geqslant 0$ лягушек, то из мешков с большими номерами, в которых сидело больше, чем x лягушек, несколько лягушек убегает так, что там остается ровно по x лягушек. Проигрывает игрок, взявший последнюю лягушку из мешка номер 1. Кто выигрывает при правильной игре?

5. a) Четыре вершины правильного восьмиугольника покрашены красным цветом, а остальные четыре — синим. Докажите, что можно найти два равных треугольника: один с красными вершинами, а другой — с синими.
b) Шесть вершин правильного 21–угольника покрашены красным цветом, а семь вершин — синим. Докажите, что можно найти два равных треугольника: один с красными вершинами, а другой — с синими.

6. Дан квадрат 4×4, изначально все клетки покрашены в белый цвет. За один ход разрешается перекрасить всех соседей (по стороне) одной клетки (белый цвет в черный, а черный — в белый). Для каких n можно перекрасить все клетки в черный цвет ровно за n ходов?

7. В стране 160 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, не проходящими через другие города. Из каждого города выходит хотя бы четыре дороги. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий не более, чем из 8 городов.